

文章编号:1000-8055(2011)09-1928-07

旋转槽道湍流的格子 Boltzmann 方法模拟

吴 宏, 王 蛟

(北京航空航天大学 能源与动力工程学院
航空发动机气动热力国家级重点实验室, 北京 100191)

摘 要: 基于多松弛格子 Boltzmann 方法的大涡模拟对雷诺数为 194, 旋转数从 0~5.0 的旋转槽道湍流进行数值模拟. 采用动态亚格子应力模型模化滤波后的不封闭项, 修正二阶矩作用力模型计算压力梯度、哥氏力. 对平均速度、均方根脉动速度、雷诺应力以及湍流结构进行了计算. 结果显示哥氏力使流场平均速度呈现不对称性: 在压力面, 随着旋转数的增加, 湍流度增强; 而在吸力面湍流脉动减弱, 具有层流化的趋势. 将格子 Boltzmann 模型与直接数值模拟求解进行对比, 结果验证了格子 Boltzmann 方法在旋转湍流模拟中的可行性.

关 键 词: 旋转槽道湍流; 格子 Boltzmann 方法; 大涡模拟; 动力亚格子应力模型; 哥氏力

中图分类号: V231. 3

文献标志码: A

Lattice Boltzmann simulations of rotating channel turbulent flow

WU Hong, WANG Jiao

(National Key Laboratory of Science and Technology on Aero-engine Aero-thermodynamics,
School of Jet Propulsion,
Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: The large eddy simulation based on the multiple relaxation time lattice Boltzmann method (LBM) was used to simulate the fully developed turbulent flow in a rotating channel at Reynolds number equaling to 194. The rotation number varied from 0 to 5.0 based on the friction velocity. The dynamic subgrid stress model was performed to model the non-closure term after filtering; the modified second moment force model was used to compute the pressure gradient and the Coriolis force. The statistical quantities such as; mean velocity, root mean square velocity fluctuations, Reynolds stress and the turbulence structure were calculated to elucidate the effect of Coriolis force on turbulent flow. The result shows that the profile of the average streamwise velocity becomes asymmetric and the turbulence intensity increases on the pressure side, while on the suction side the flow has a tendency to become laminar. The comparison results between the direct numerical simulation and present work show that the ability of LBM to simulate rotating turbulence is confirmed.

Key words: rotating channel turbulence; lattice Boltzmann method;
large eddy simulation; dynamical subgrid scale model; Coriolis force

旋转通道内的流动特性研究有着广泛的应用背景, 如在航空发动机涡轮叶片的冷却通道、泵以

及旋转换热器中. 对于非惯性系下的旋转流动, 由于哥氏力的存在, 使得在通道的压力面和吸力面

收稿日期: 2011-03-16; 修订日期: 2011-06-09

基金项目: 国家自然科学基金(50976008)

作者简介: 吴宏(1971—), 男, 福建浦城人, 副教授, 博士, 主要从事航空发动机热高温部件冷却研究.

附近的湍流分别受到一定的增强和抑制,这是旋转槽道流动的典型特质;另外,在哥氏力的影响下,槽道内的平均流动变得不对称,在主流区形成具有一定斜率的直线分布.哥氏力作为一种体积力对湍流结构以及流动稳定性有重要的影响,而这种影响机理有重要的理论研究价值.因此,有关学者进行了大量的实验以及数值计算研究. Johnston 等人^[1]通过实验研究发现,旋转改变了近壁面区域湍流的猝发率,并且在吸力面附近抑制湍流的转换.通过流场显示技术, Johnston 等还发现了旋转槽道中的大尺度涡卷,即 Taylor-Götler 涡的存在.这些现象被 Kristoffersen 等人^[2]通过直接数值模拟(DNS)进行了进一步的验证. Kristoffersen 等还发现随着旋转数的增加,横截面涡的对数也在增加,并且逐步靠近压力面.这些横截面二次涡对将湍流从压力面输运到吸力面起到重要的作用.最近 Grundestam 等人^[3]通过 DNS 对高旋转数下的槽道湍流进行研究,发现当旋转数提高到一定值之后,槽道内将会完全层流化. Alkishriwi 等人^[4]通过大涡模拟对流向旋转槽道流进行数值研究. Nagano 等人^[5]以及 LIU 等^[6]对展向旋转槽道流换热进行了数值研究.从现有文献中可以发现,数值模拟在旋转湍流的研究中有着至关重要的作用.

以上的数值模拟都是基于 Navier-Stokes(N-S)方程的常规数值计算.而最近,基于动理论的格子 Boltzmann 方法(lattice Boltzmann method, 简称 LBM)因为其天然的并行性、易处理复杂边界条件,并且可以通过简单的流动碰撞过程来描述复杂的流动问题,从而受到了广泛的关注.经过二十年的发展, LBM 已经成为一种可靠的数值模拟工具,逐渐应用到工程与湍流的计算中.在湍流模拟方面,与基于 N-S 方程的数值方法类似, LBM 有直接数值模拟^[7-8]、与湍流模型相结合^[9-10]以及基于 LBM 的大涡模拟^[11-13]三种途径.

将 LBM 用于非惯性系下的湍流研究,目前还尚未见报道.而通过 LBM 进行大涡模拟除了并行计算上的优势之外,其通过当地的非平衡矩(或者非平衡分布函数)对应变率张量进行计算,不需要进行差值计算,从而不会引入额外的数值黏性.因此,本文探索构建基于多松弛 LBM 的大涡模拟框架,对沿展向轴旋转槽道内的湍流进行数值模拟研究,旨在研究旋转对湍流结构的影响以及 LBM 在工程应用上的拓展.

1 计算方法

1.1 计算问题描述

计算域选择高为 $2H$ 的通道, x, y, z 分别为流向、法向和展向.具体尺寸如图 1 所示.

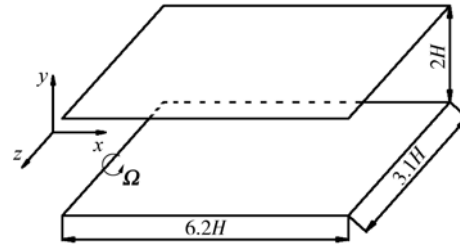


图1 计算区域

Fig. 1 Computational domain

计算网格为 $x \times y \times z = 325 \times 101 \times 155$.对于旋转槽道,无量纲化后的控制方程为

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p_{\text{eff}} + \frac{1}{Re_\tau} \nabla^2 \mathbf{u} - N_\tau \frac{\boldsymbol{\Omega}}{\Omega_z} \times \mathbf{u} \quad (2)$$

由式(2)可知,最主要的两个无量纲参数为雷诺数 Re_τ 与旋转数 N_τ , 定义为

$$Re_\tau = \frac{u_\tau H}{\nu}, \quad N_\tau = \frac{2\Omega_z H}{u_\tau} \quad (3)$$

其中 u_τ 为全局摩擦速度, Ω_z 为旋转角速度. 本文研究雷诺数 $Re_\tau = 194$, 旋转数 N_τ 为 0, 1.5, 3.0 和 5.0 四种工况.

1.2 数值方法及边界条件

LBM 是对 Boltzmann 方程的碰撞项进行简化后,在速度空间、位置空间以及时间上进行离散之后的一种介观数值模拟方法.现有的 LBM 通常采用 BGK(Bhatnagar-Gross-Krook)碰撞模型,或称为单松弛时间模型,这种碰撞模型简单且物理意义明确,即碰撞使得分布函数趋于平衡态,因此受到了广泛的关注.然而,其对所有的矩用同一参数进行松弛,在计算高雷诺数时的数值稳定性不足.为了改善 LBM 在计算高雷诺数时数值稳定性,本文采用多松弛格子 Boltzmann 模型,或称为广义格子 Boltzmann 模型.其基本的演化方程为

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i \delta t, t + \delta t) - f_i(\mathbf{x}, t) = -(\mathbf{M}^{-1} \mathbf{S})_{ij} (m_j - m_j^{\text{eq}}) + \delta t \mathbf{F}_i \quad (4)$$

其中 f 为分布函数, $\mathbf{e}$ 为离散速度,下标 i, j 表示

离散速度编号(下同), $\mathbf{M}$ 为变换矩阵, $\mathbf{S}$ 为松弛参数对角矩阵, $\mathbf{m}$ 为分布函数的速度矩, $\mathbf{m}^{\text{eq}}$ 为平衡矩, $\mathbf{F}$ 为力项. 本文中离散速度模型采用 D3Q19 模型, 其离散速度如图 2 所示.

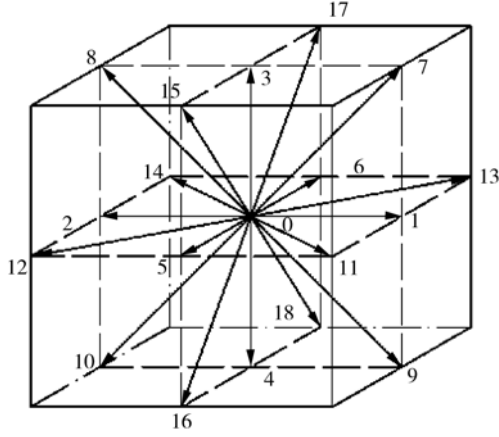


图 2 D3Q19 速度模型

Fig. 2 D3Q19 discrete velocity model

$\mathbf{M}$ 为变换矩阵, 其具体形式参见文献[14]. 速度矩为

$$\mathbf{m} = [\rho, e, \epsilon, j_x, q_x, j_y, q_y, j_z, q_z, 3p_{xx}, 3\pi_{xx}, p_{xy}, p_{yz}, t_x, t_y, t_z]^T;$$

对应的平衡矩为

$$\mathbf{m}^{\text{eq}} = \rho[1, -11 + 19u^2, \alpha + \beta u^2, u_x, -2u_x/3, u_y, -2u_y/3, u_z, -2u_z/3, 3u_x^2 - u^2, u_y^2 - u_z^2, u_x u_y, u_y u_z, u_z u_x, \gamma p_{xx}^{\text{eq}}/\rho, \gamma p_{xy}^{\text{eq}}/\rho, 0, 0, 0]^T;$$

松弛参数为

$$\mathbf{S} = (0, s_e, s_\epsilon, 0, s_q, 0, s_q, 0, s_q, s_\pi, s_\nu, s_\pi, s_\nu, s_\pi, s_\nu, s_\pi, s_\nu, s_\pi, s_\nu).$$

其中 α, β, γ 为模型参数. 多松弛时间模型能够改善 LBM 的数值稳定性, 其最直观的原因就是对于不同的分布函数矩使用不同的松弛参数. 除了与流体扩散系数相关的参数之外, 其他的松弛参数可以进行优化选取, 从而提高数值稳定性. 在本文中, 参考 Lallemand 等人[14]对多松弛参数模型稳定性分析, 选取 $s_e = 1.19, s_q = 1.2, s_\epsilon = s_\pi = 1.4, s_t = 1.98$, 其中与流体黏性相关的松弛参数 s_ν 计算方法为

$$s_\nu = \frac{2}{6(\nu + \nu_t)} \quad (5)$$

其中 ν 为流体黏性系数, ν_t 为湍流黏性系数.

在本文中对大涡模拟的处理与 Premnath 等人[12-13]的做法相同: 通过对 N-S 方程进行滤波, 滤波得到的不封闭项通过动态亚格子应力模型进行模化. 正如上文所描述, 得到的湍流黏性系数与

LBM 中的松弛参数相关. 动态亚格子应力模型为 $\nu_t = C\bar{\Delta}^2 |\bar{\mathbf{S}}|$, 其中

$$|\bar{\mathbf{S}}| = \sqrt{2 \bar{\mathbf{S}}_{\alpha\beta} \bar{\mathbf{S}}_{\alpha\beta}} \quad (6)$$

$\bar{\mathbf{S}}_{\alpha\beta}$ 为滤波应变率张量(下标 α, β 为亚元, 对于三维问题取 1, 2, 3), 可通过非平衡矩求得; Yu 等人[11]与 Premnath 等人[13]通过 Chapman-Enskog 展开得到了 $\bar{\mathbf{S}}_{\alpha\beta}$ 的计算表达式; C 是模型系数, 通过引入二次滤波得到二次滤波的亚格子应力, 将其与一次滤波得到的亚格子应力经过 Smagorinsky 模型封闭, 带入到 Germano 等式[15]中, 动态的求得; $\bar{\Delta}$ 为一次滤波尺度, 在此 $\bar{\Delta}$ 为网格长度, 即 $\bar{\Delta} = \delta x$.

为了有效的克服离散效应, 本文中作用力模型选择 Guo 等[16]提出的修正二阶矩模型. 其在速度分布函数空间中的表达式为

$$F_i = \omega_i [3(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{F}) + 9\mathbf{u}\mathbf{F} : (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i - 3\mathbf{I})] \quad (7)$$

其中 $\mathbf{I}$ 为二阶单位张量. 由于碰撞发生在矩空间中, 因此需要求得上述表达式在矩空间中的形式 $F_{mi} = M_{ij} F_j$. 在 D3Q19 速度分布函数下, 矩空间中 $\mathbf{F}$ 的表达式为

$$F_{m0} = 0, F_{m1} = 38(F_x u_x + F_y u_y + F_z u_z),$$

$$F_{m2} = -11(F_x u_x + F_y u_y + F_z u_z),$$

$$F_{m3} = F_x, F_{m4} = -2F_x/3, F_{m5} = F_y,$$

$$F_{m6} = -2F_y/3, F_{m7} = F_z, F_{m8} = -2F_z/3,$$

$$F_{m9} = 2(F_x u_x - F_y u_y - F_z u_z),$$

$$F_{m10} = -(2F_x u_x - F_y u_y - F_z u_z),$$

$$F_{m11} = 2(F_y u_y - F_z u_z),$$

$$F_{m12} = -(F_y u_y - F_z u_z),$$

$$F_{m13} = F_x u_y + F_y u_x, F_{m14} = F_y u_z + F_z u_y,$$

$$F_{m15} = F_x u_z + F_z u_x, F_{m16} = F_{m17} = F_{m18} = 0.$$

其中 F_x, F_y, F_z 分别为流向、法向及展向所受到的作用力, 在本文中, 其表达式分别为

$$F_x = -\frac{dp}{dx} + 2\Omega_z u_y \quad (8)$$

$$F_y = -2\Omega_z u_x \quad (9)$$

$$F_z = 0 \quad (10)$$

与文献[13]相比较可知, 其表达式与 He 等[17]提出的作用力模型在矩空间中的表达式相同.

上下壁面中用半步反弹格式来实现无滑移边界条件, 流向及展向使用周期性边界条件. 整个计算区域沿流向分为 12 块, 通过软件 MPICH 进行并行计算. 在旋转数为 0 的情况下, 初始场为在二维泊肃叶流动的剖面增加具有一定强度的无散度的初始扰动[18]. 在模拟旋转状态时, 利用静止的

或者小旋转数的流场作为初始场。

2 计算结果及分析

2.1 平均流动

图3为通道中不同的旋转数状态下的平均流动速度计算结果.通过全局摩擦速度进行无量纲化,全局摩擦速度的定义为

$$u_\tau = \sqrt{u_{\tau p}^2 + u_{\tau s}^2} \quad (11)$$

其中 $u_{\tau p}$, $u_{\tau s}$ 分别为压力面与吸力面的摩擦速度.可以看出,随着旋转数的增加,在哥氏力的作用下,平均速度剖面由对称分布转变为非对称分布.平均速度分布与文献[6]中的速度分布吻合较好.在 $N_\tau = 5.0$ 时,吸力面的极大值预测的比 DNS 值较低,这可以通过在吸力面使用非均匀网格技术来改善.

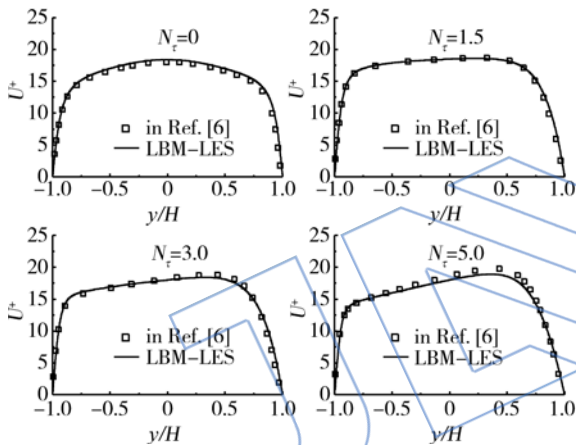


图3 不同的旋转数下的平均速度剖面

Fig. 3 Profile of the mean streamwise velocity at different rotation number

压力面与吸力面非对称的速度剖面也导致了在压力面与吸力面不同的当地摩擦速度.图4给出了在不同的旋转数下,压力面和吸力面不同的壁面摩擦速度的分布.由图中可以看出,压力面的壁面摩擦速度增加而吸力面的摩擦速度减小.并且其数值分布与 Kristoffersen 等人的 DNS 结果吻合较好.

图5显示了以当地摩擦速度对压力面与吸力面速度分别无量纲化后的结果.其中 Y^+ 的定义为

$$Y^+ = \begin{cases} \frac{(1-y)u_{\tau p}}{\nu} & (y > 0) \\ \frac{(1+y)u_{\tau s}}{\nu} & (y < 0) \end{cases} \quad (12)$$

由图5中可以看出,随着旋转数的增加,压力

面的速度分布趋于对数律分布;而在吸力面,随着旋转数的增加,速度分布逐渐靠近 $U^+ = Y^+$, 逐渐出现层流化的趋势.

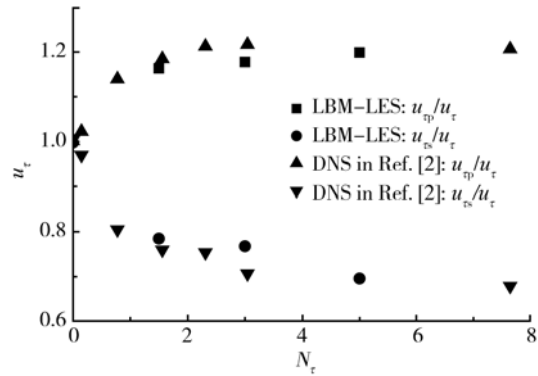


图4 不同旋转数下压力面、吸力面摩擦速度与有效摩擦速度之比

Fig. 4 Friction velocity ratio on the pressure side and suction side at different rotation numbers

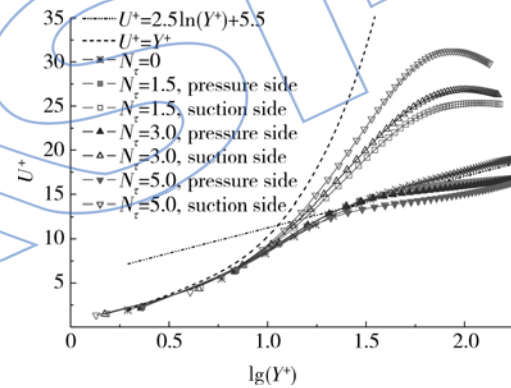


图5 不同旋转数下平均速度随 Y^+ 的分布

Fig. 5 Mean velocity profile at different rotation numbers in wall coordinates Y^+

2.2 湍流均方根脉动速度与雷诺应力

图6~图8给出了不同旋转数下的均方根速度的法向分布.从图中可知三个方向的均方根速度在静止时均为对称分布,在旋转起来之后这种对称分布被打破,压力面和吸力面上分布不同.在压力面, u'_{rms} 在低旋转数有显著增加之后,随着旋转数的增加而逐渐减小,这与文献中提到的在压力面湍流的再稳定性相一致.而 v'_{rms} , w'_{rms} 则随着旋转数的增加而增加,这也显示了旋转在湍流应力上的再分配能力.在吸力面, u'_{rms} , v'_{rms} , w'_{rms} 均随着旋转数的增加而减小,因此在吸力面出现显著的层流化趋势.湍流的均方根脉动速度分布与文献[6]中 DNS 结果吻合较好.

图9给出了雷诺应力 $-\langle u'v' \rangle$ 在整个通道内的分布。随着旋转数的增加,雷诺应力的反对称性进一步被破坏。在压力面,雷诺应力的极大值随着旋转数的增加而增大;而吸力面上则随着旋转数增加而减小。在槽道中部的雷诺应力与静止通道

中的雷诺应力相同呈现出直线分布,这也证明了本文中的计算达到了统计稳态。

2.3 湍流结构

哥氏力对旋转通道湍流最直观的影响表现在对近壁面区湍流条带的分布影响。图10给出了不

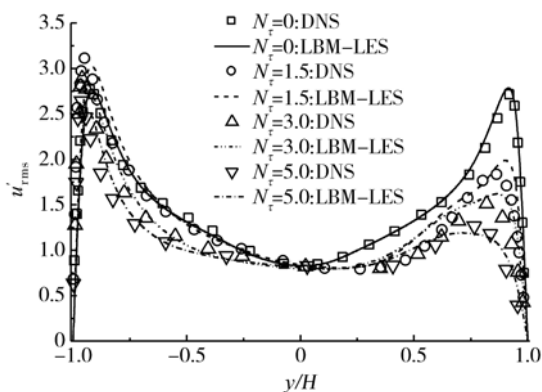


图6 不同旋转数下流向均方根脉动速度

Fig. 6 Profile of the root mean square streamwise fluctuations at different rotation numbers

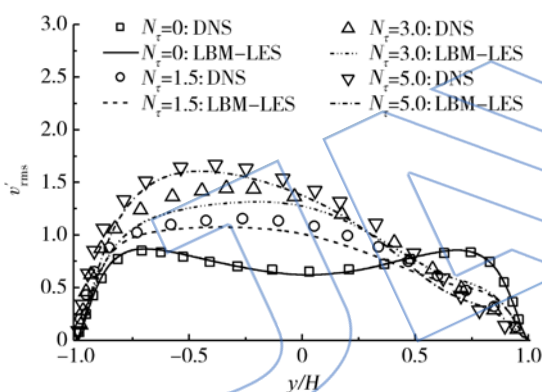


图7 不同旋转数下法向均方根脉动速度

Fig. 7 Profile of the root mean square normal-wall fluctuations at different rotation numbers

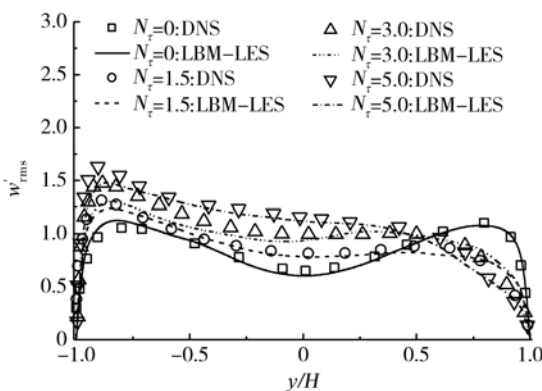


图8 不同旋转数下展向均方根脉动速度

Fig. 8 Profile of the root mean square spanwise fluctuations at different rotation numbers

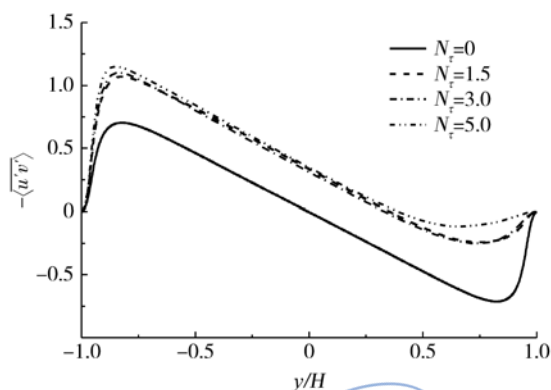
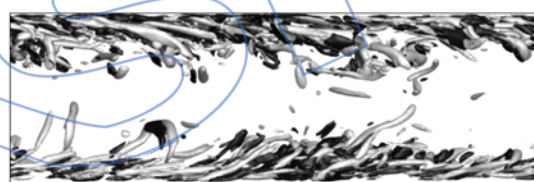
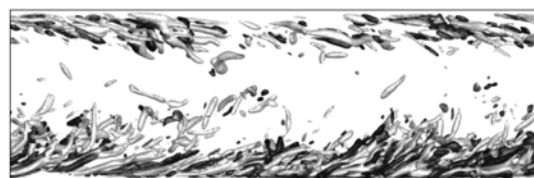


图9 不同旋转数下旋转雷诺应力 $-\langle u'v' \rangle$

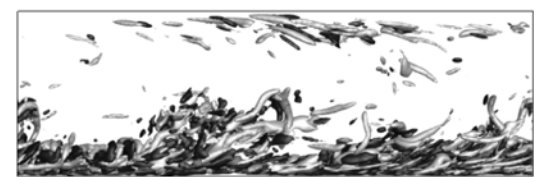
Fig. 9 Profile of the Reynolds stress $-\langle u'v' \rangle$ at different rotation numbers



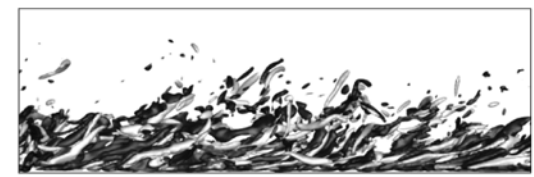
(a) $N_r=0$



(b) $N_r=1.5$



(c) $N_r=3.0$



(d) $N_r=5.0$

图10 不同旋转数下的湍流结构

Fig. 10 Turbulence structure at different rotation numbers

同旋转数下近壁面区域湍流结构的 Q ($Q=0.5$, -0.5) 等值面, 其中亮颜色的是正值, 暗色的是负值. 从图中可以看出, 随着旋转数的增加, 近壁面区域条带在吸力面减少并在压力面增加, 并且在压力面条带与壁面的夹角增大, 条带前缘相对于壁面抬升. 条带结构的猝发、分裂和重组过程都因为旋转附加力的存在而发生明显的变化.

哥氏力对湍流结构的另一影响就是在横向界面上大尺度 Taylor-Götler 涡结构的出现. Kristoffersen 等人^[2]指出, 若对流场在流向上和短时间上 (统计时间小于 Taylor-Götler 的漂移时间) 进行平均, 则在横截面上会形成平滑的、固定的涡对. 本文通过对瞬时速度场进行分析仍然可以看出 Taylor-Götler 的存在. 图 11 给出了两个旋转数下的横截面, 即垂直于流向截面上等法向速度 (u_y) 的等值线. 从中可以看出, 哥氏力引起了横截面上的二次流动, 形成了涡量正负相间的流向涡对, 并且随着旋转数的增大, 涡对的数目增加, 整体上靠近压力面.

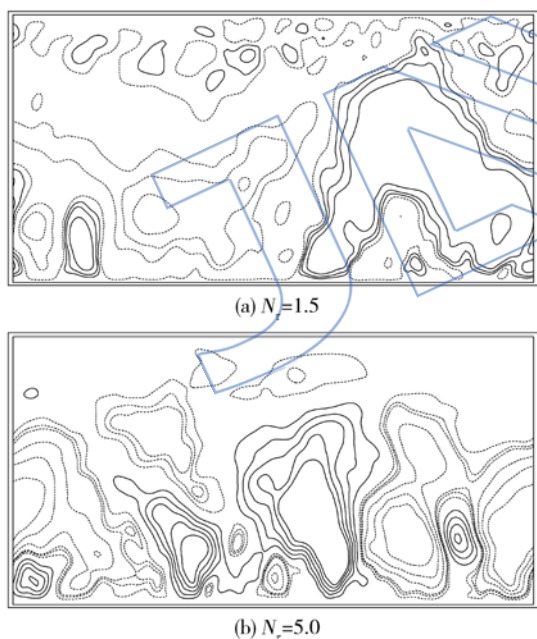


图 11 旋转数为 1.5 和 5.0 时横截面上方向速度 (u_y) 等值线, 虚线为负值

Fig. 11 Iso-line of the normal velocity (u_y) in the cross section at rotation number are 1.5 and 5.0, where dashed lines denote negative value

3 结 论

本文通过构建基于格子 Boltzmann 方法的大

涡模拟框架, 对旋转槽道湍流进行了数值模拟, 并对平均流动速度、均方根速度、雷诺应力以及湍流结构进行了计算. 计算结果证实了在旋转槽道内, 哥氏力的存在使得平均速度变得非对称, 并且在槽道中部出现一定斜率的直线分布; 湍流应力在压力面和吸力面上有不同的增强或者减弱, 哥氏力对湍流应力的再分配作用明显; 在槽道中大尺度 Taylor-Götler 涡出现. 从而, 进一步证明了 LBM 在对非惯性系下湍流预测的可行性, 为今后将 LBM 应用于旋转盘腔、旋转通道换热中打下了基础.

需要讨论的是在高旋转数下大涡模拟计算结果与 DNS 结果存在一定的误差. 这是由于一方面在高速旋转下, 靠近壁面的区域, 湍流逐渐呈现出各向异性, 而基于 Smagrinisky 模型的动态亚格子模型能否适应这种流态的变化还需要进一步的研究. 另一方面, 多松弛格子 Boltzmann 方法中, 松弛矩阵与流体黏性相关. 可以通过松弛矩阵中的非对角元素建立起各项异性湍流的模拟方法. 这将是今后研究的重点.

参考文献:

- [1] Johnston J P, Halleent R M, Lezius D K. Effects of span-wise rotation on the structure of two-dimensional fully developed turbulent channel flow[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1972, 56(3): 533-557.
- [2] Kristoffersen R, Andersson H I. Direct simulations of low-Reynolds-number turbulent flow in a rotating channel[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1993, 256: 163-197.
- [3] Grundestam O, Wallin S, Johansson A V. Direct numerical simulations of rotating turbulent channel flow[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2008, 598: 177-199.
- [4] Alkishriwi N, Meinke M, Schröder W. Large-eddy simulation of streamwise-rotating turbulent channel flow[J]. Computers & Fluids, 2008, 37(7): 786-792.
- [5] Nagano Y, Hattori H. Direct numerical simulation and modelling of spanwise rotating channel flow with heat transfer[J]. Journal of Turbulence, 2003, 4(10): 1-15.
- [6] LIU Nansheng, LU Xiyun. Direct numerical simulation of spanwise rotating turbulent channel flow with heat transfer[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2007, 53(11): 1689-1706.
- [7] Yu D, Girimaji S S. DNS of homogenous shear turbulence revisited with the lattice Boltzmann method[J]. Journal of Turbulence, 2005, 6(6): 1-17.
- [8] Spasov M, Rempfer D, Mokhasi P. Simulation of a turbulent channel flow with an entropic Lattice Boltzmann method[J]. International Journal for Numerical Methods

- in Fluids, 2009, 60(11):1241-1258.
- [9] Succi S, Amati G, Benzi R. Challenges in lattice Boltzmann computing[J]. Journal of Statistical Physics, 1995, 81(1-2): 5-16.
- [10] CHEN Hudong, Kandasamy S, Orszag S, et al. Extended Boltzmann kinetic equation for turbulent flows[J]. Science, 2003, 301(5633):633-636.
- [11] YÜ Huidan, LUO Lishi, Girimaji S S. LES of turbulent square jet flow using an MRT lattice Boltzmann model[J]. Computers & Fluids, 2006, 35(8-9):957-965.
- [12] Premnath K N, Pattison M J, Banerjee S. Dynamic subgrid scale modeling of turbulent flows using lattice-Boltzmann method[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2009, 388(13):2640-2658.
- [13] Premnath K N, Pattison M J, Banerjee S. Generalized lattice Boltzmann equation with forcing term for computation of wall-bounded turbulent flows[J]. Physical Review E, 2009, 79(2):026703(19 pages).
- [14] Lallemand P, LUO Lishi. Theory of the lattice Boltzmann method: acoustic and thermal properties in two and three dimensions[J]. Physical Review E, 2003, 68(3):036706(25 pages).
- [15] Germano M. Turbulence: the filtering approach[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1992, 238:325-336.
- [16] GUO Zhaoli, ZHENG Chuguang, SHI Baochang. Discrete lattice effects on the forcing term in the lattice Boltzmann method[J]. Physical Review E, 2002, 65(4):046308(6 pages).
- [17] HE Xiaoyi, SHAN Xiaowei, Doolen G D. Discrete Boltzmann equation model for nonideal gases[J]. Physical Review E, 1998, 57(1):R13-R16.
- [18] Lam K, Banerjee S. On the condition of streak formation in a bounded turbulent flow[J]. Physics of Fluids A, 1992, 4(2):306-320.